นสพ.เดลินิวส์ ฉบับวันศุกร์ที่ 2 ธันวาคม 2559

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 8 (ตอนที่ 2/5)

เดลินิวส์ ร่วมกับ นักเรียนโปรดทราบ

โดยช่วงตั้งแต่ 18 ต.ค. 59-3 มี.ค. 60 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ มีเซต B ได้ทั้งหมดกี่เซตซึ่ง $B \subseteq C$ และ $A \cap B$ มีสมาชิก 3 ตัว และสมาชิกของ B เป็น "พยัญชนะ" ของอักษรภาษาอังกฤษ

1) 2   2) 3
3) 4   4) 5

2. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $-1 + i\sqrt{3}$ เป็นรากที่ 5 ของ z แล้วรากที่สองของ z คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1) $\pm 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + i)$ 2) $\pm 2\sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$
3) $\pm 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - i)$ 4) $\pm 2\sqrt{2}(1 - i\sqrt{3})$

3. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ เมื่อ $0 < x < \pi$ ค่า**ต่ำสุด**ของ f(x) เท่ากับเท่าใด

1) 10   2) 12
3) 14   4) 16

4. ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $x > 3 + \dfrac{7}{x+3}$ บนช่วง $[-10, 10]$ ความยาวของ A เท่ากับกี่เปอร์เซ็นต์ของความยาวของ $[-10, 10]$

1) 30   2) 35
3) 40   4) 45

5. จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุดโฟกัสของภาคตัดกรวย $4x^2 - 9y^2 = 1$ และ $y = 2x^2$ คือจุดซึ่งมีพิกัด y เท่ากับเท่าใด

1) $-\dfrac{71}{144}$ 2) $\dfrac{71}{144}$
3) $-\dfrac{199}{144}$ 4) $\dfrac{199}{144}$

6. ถ้า [x] แทนจำนวนเต็มที่**มากที่สุด**ซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x แล้ว $\sum_{n=1}^{1024} [\log_2 n]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 8192   2) 8204
3) $[\log_2 (1024!)]$ 4) ไม่มีข้อใดถูก

เฉลย

1. เฉลย 3) 4

เนื่องจาก $A \cap B$ มีสมาชิก 3 ตัว และสมาชิกของ B เป็น "พยัญชนะ" ของอักษรภาษาอังกฤษ ดังนั้น b, c, d ต้องเป็นสมาชิกของ B แต่เนื่องจาก $B \subseteq C$

ดังนั้น f และ g ซึ่งเป็นสมาชิกของ C อาจเป็นสมาชิกของ B หรือไม่ก็ได้ นั่นคือ B อาจเป็น {b, c, d} หรือ {b, c, d, f} หรือ {b, c, d, g} หรือ {b, c, d, f, g}

ดังนั้น มีเซต B ที่เป็นไปได้มีทั้งหมด 4 เซต

2. เฉลย 4) $\pm 2\sqrt{2}(1 - i\sqrt{3})$

ถ้า $-1 + i\sqrt{3}$ เป็นรากที่ 5 ของ z แล้วจะได้ว่า $(-1 + i\sqrt{3})^5 = z$

เขียน $-1 + i\sqrt{3}$ ในรูปแบบพิกัดเชิงขั้ว ดังนี้

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{(-1)} = -\sqrt{3}$$ (สังเกตว่า θ อยู่ในควอดรันต์ที่สอง)

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

นั่นคือ $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$z = (-1 + i\sqrt{3})^5 = 2^5\left(\cos\left(5 \times \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(5 \times \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 32\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

รากที่สองของ z คือ

$$z^{1/2} = \sqrt{32}\left(\cos\left(\frac{2\pi k + \frac{10}{3}\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k + \frac{10}{3}\pi}{2}\right)\right), k = 0, 1$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right), 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right), 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right), 4\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \pm 2\sqrt{2}(1 - i\sqrt{3})$$

3. เฉลย 2) 12

เขียน f(x) ใหม่ในรูปแบบ

$$f(x) = 9x\sin x + \frac{4}{x\sin x}$$

ให้ $g(u) = 9u + \dfrac{4}{u}$ เมื่อ $u = x\sin x$

จะได้ว่า ค่า**ต่ำสุด**ของ f(x) เท่ากับค่า**สูงสุด**ของ g(u)

$$g'(u) = 9 - \frac{4}{u^2}$$

ให้ $g'(u) = 0$

$$9 - \frac{4}{u^2} = 0$$

$$9u^2 - 4 = 0$$

จะได้ $u = \pm\frac{2}{3}$ (แต่ $u = -\frac{2}{3}$ ไม่ได้ เพราะว่า $u = x\sin x > 0$ เมื่อ $0 < x < \pi$)

และได้ $g\left(\frac{2}{3}\right) = 9\left(\frac{2}{3}\right) + \dfrac{4}{\frac{2}{3}} = 12$ เป็นค่า**สูงสุด**ของ g(u) และเป็นค่า**ต่ำสุด**ของ f(x)

4. เฉลย 2) 35

$$x > 3 + \frac{7}{x+3}$$

$$x - 3 - \frac{7}{x+3} > 0$$

$$\frac{(x-4)(x+4)}{x+3} > 0$$

$-$ (−4) $+$ (−3) $-$ (4) $+$ (x − 4)(x + 4)/(x + 3), x

พิจารณาเฉพาะคำตอบบนช่วง $[-10, 10]$ คือ

$$A = (-4, -3) \cup (4, 10]$$

ความยาวของ A เท่ากับ $(-3 - (-4)) + (10 - 4) = 1 + 6 = 7$

ความยาวของ $[-10, 10]$ เท่ากับ $10 - (-10) = 20$

ดังนั้น $\dfrac{\text{ความยาวของ A}}{\text{ความยาวของ } [-10, 10]} = \dfrac{7}{20} = 0.35 = 35\%$

5. เฉลย 3) $-\dfrac{199}{144}$

สำหรับไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 9y^2 = 1$ อาจเขียนในรูปแบบ

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

จะได้ $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$

ดังนั้น จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคือ $F_1 = \left(-\frac{\sqrt{13}}{6}, 0\right)$ และ $F_2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{6}, 0\right)$

สำหรับพาราโบลา $y = 2x^2$ หรือ $x^2 = \frac{1}{2}y$ มีโฟกัสอยู่ที่จุด $F_3 = \left(0, \frac{1}{8}\right)$

เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดของวงกลมที่กำหนดให้คือแกน y ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนแกน y สมมติว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $C = (0, k)$ เนื่องจาก $CF_1 = CF_3$ = รัศมี จะได้ว่า

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2 + k^2} = \sqrt{\left(k - \frac{1}{8}\right)^2}$$

$$\frac{13}{36} + k^2 = k^2 - \frac{1}{4}k + \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{4}k = \frac{1}{64} - \frac{13}{36}$$

$$k = \frac{1}{16} - \frac{13}{9} = -\frac{199}{144}$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $\left(0, -\frac{199}{144}\right)$ ซึ่งมีพิกัด y เท่ากับ $-\frac{199}{144}$

6. เฉลย 2) 8204

$$[\log_2 n] = \begin{cases} 1, & 2 \le n < 2^2 \\ 2, & 2^2 \le n < 2^3 \\ 3, & 2^3 \le n < 2^4 \\ \vdots & \vdots \\ 9, & 2^9 \le n < 2^{10} \\ 10, & n = 2^{10} \end{cases}$$

∵ ในช่วง $2^k \le n < 2^{k+1}$ จะมีจำนวนเต็มบวก $n = 2^{k+1} - 2^k$ จำนวน เช่น $2 \le n < 2^2$ จะมีจำนวนเต็มบวก $n = 2^2 - 2 = 2$ จำนวน (2, 3)

ดังนั้น ผลบวกที่ต้องการหาคือ

$$\sum_{n=1}^{1024} [\log_2 n] = 1(2^2 - 2) + 2(2^3 - 2^2) + 3(2^4 - 2^3) + \ldots + 9(2^{10} - 2^9) + 10$$

$$= 9 \cdot 2^{10} - (2^9 + 2^8 + 2^7 + \ldots + 2) + 10$$

$$= 9 \cdot 2^{10} - (2^9 + 2^8 + 2^7 + \ldots + 2 + 1) + 11$$

$$= 9 \cdot 2^{10} - (2^{10} - 1) + 11$$

$$= 8 \cdot 2^{10} + 12 = 8(1024) + 12 = 8204$$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com